レクチャー・ノート：
通常p進曲線の理論について
(望月 新一)

目次：

I. 複素数体上の古典的な理論：

(A.) Riemann 面の一意化： X は有限型の Riemann 面で、 g は種数、 r は抜けている点の数とする。そういう X は代数曲線としても捉えることができるが、解析的に考えると、 X の普遍的被覆空間 $\widetilde{X} \to X$ が有り、もし、 X が双曲的 ($\iff 2g-2+r \geq 1$) であれば、Köbe の一意化定理：

$$\widetilde{X} \cong H$$

（ここで、 H は上半平面）が成り立つ。標題の通常理論のそもそもの目的は、以上の非常に解析的な事実を適当に加工することによって、その p 進版を発見することにあった。

(B.) X 上の射影的構造：まず、上の一意化同型 $\widetilde{X} \cong H$ をもっと代数的な言葉に翻訳したい。その第一歩として、次のような構成が出来る： $H \subseteq \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ なので、 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ 上の有理関数を H に引き戻し、更に、上の一意化同型を使って X にも単射に入る程小さな開集合 $U \subseteq \widetilde{X}$ に制限すると、 X の上で局所的に定義された「特別な関数」の族が得られる。正確にいうと、 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ なる部分層が得られたことになる。これを X 上の「標準的射影的構造」(*canonical projective structure*) という。

もっと一般に「このような」部分層 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ を「射影的構造」と呼ぶ。二つの射影的構造 $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{O}_X$ が与えられた時、 $f \in \mathcal{S},\ z \in \mathcal{S}'$ を取って、 $f = f(z)$ と書くと、

$$(d_{Sch} f(z)) \cdot (dz)^{\otimes 2}$$

（ここで、 d_{Sch} は初等的複素解析でお馴染みの Schwarz 微分）なる二次微分は $\mathcal{S},\ \mathcal{S}'$ にしか依存せず、 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ の差を測るようなものとみることができる。従って、 X 上の射影的構造の

存在を司る障害類は $H^1(X, \omega_X^2)$ ($= 0$ if $2g-2+r \geq 1$) に入っていて、射影的構造のモジュライは $H^0(X, \omega_X^2)$ 上の torsor になる。

(C.) 固有束 (*indigenous bundle*) の導入：一意化同型のもう一つの非常に重要な再解釈の仕方が有る。同型 $\widetilde{X} \cong H$ の両辺にも $\pi_1(X)$ の作用が有り、同型もそれに関して同変である。従って、$\pi_1(X) \to PSL_2(\mathbf{R})$ なる標準的な monodromy 表現が定義され、$\widetilde{X} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ を $\pi_1(X)$ の作用で割ると、$P \to X$ なる X 上の $\mathbf{P}^1$-bundle が得られる。そして、$\pi_1(X)$ の $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ への作用が $\widetilde{X}$ に関して定数であることから、その $\mathbf{P}^1$-bundle に接続 ∇_P が入ることが分かる。後、$\widetilde{X} \to \widetilde{X} \times H \hookrightarrow \widetilde{X} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ を $\pi_1(X)$ の作用で割ることによって、断面 $\sigma : X \to P$ も得られる。この断面を ∇_P で微分すると、$\nabla_P(\sigma) : \tau_X \to \tau_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^* \tau_{P/X}$ なる Kodaira-Spencer 写像も定義でき、上の射 $\widetilde{X} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ が局所的な同型であることから、$\nabla_P(\sigma)$ が同型であることが分かる。このデータ $(P \to X, \nabla_P, \sigma : P \to X)$ を X の「標準的固有束」と呼ぶ。

もっと一般に、「このようなデータ」$(P \to X, \nabla_P, \sigma)$（つまり、$\sigma$ の Kodaira-Spencer が同型となるような接続付きの $\mathbf{P}^1$-bundle）を「固有束」(*indigenous bundle*) という。（実は、(Hodge section と呼ばれる) σ は、もし存在すれば、一意的なので、以下 σ の特定を省略する。）重要なことは、（Serre の GAGA からすぐ分かるように）固有束という概念は代数的（！）なのである。一方、X 上の固有束（の同型類）と X 上の射影的構造が同値であることは簡単に証明することができる。従って、X 上の固有束のモジュライ空間は $H^0(X, \omega_X^2)$ 上の torsor になっていて、普遍的な場合を考えれば、

$$\overline{\mathcal{S}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$$

（ここで、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ は $\mathbf{C}$ 上の安定曲線の moduli stack）なる $\Omega_{\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathbf{C}}$ 上の（代数的な圏で定義された）torsor になる。この torsor を *Schwarz torsor* といい、それが定義するコホモロジー類

$$\eta_{g,r} \in H^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,r}, \Omega_{\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathbf{C}})$$

を *Schwarz class* という。

最後に、標準的固有束が Schwarz torsor の標準的な実解析的（でしかない）断面 $s_H : \overline{\mathcal{M}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{S}}_{g,r}$ を定義することに気付こう。

Remark: $\pi : P \to X$ が $\mathbf{P}^1$-bundle ならば、$Ad(P) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_* \tau_{P/X}$（$\tau_{P/X}$ は P の X 上の relative tangent bundle）は半単純 Lie 環としての構造を持つ、X 上の rank 3 のベクトル束になる。従って、どうしても $\mathbf{P}^1$-bundle を扱うのが嫌な方は、$Ad(P)$ を扱うことによって、ベクトル束の世界に留まることができる。

(D.) 幾つかの標準的な Kähler 計量の紹介：s_H は全然正則ではないので、$\overline{\partial} s_H$ を取ると、$\Omega^{log}_{\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathbf{C}} \otimes \Omega_{\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathbf{C}}$ の、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ 上実解析的な非自明な断面 μ_{WP} が得られる。その μ_{WP} を更に微分すると、零になるし、実は、μ_{WP} は $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ 上の Kähler 計量（= Weil-Petersson 計量という）を定義する。（後ほど詳しく解説するように）実解析的な Kähler 計量の一般論として、そういう Kähler 計量を積分すると、もとの複素多様体上の標準的な座標が得られる。この場合には、$\mathcal{M}_{g,r}$ の普遍的被覆空間 $\overline{\mathcal{M}}_{g,r} \to \mathcal{M}_{g,r}$（= Teichmüller 空間）の上で、この計量 μ_{WP} を大域的に積分することができ、それによって、各基点 $[X] \in \mathcal{M}_{g,r}(\mathbf{C})$ に対して、

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,r} \hookrightarrow H^0(X, \omega_X^2)^c$$

（ここで、上付きの"c"は複素共役空間を意味する）なる affine 空間の中への埋め込み、即ち Teichmüller 空間の標準的な一意化が得られる。この一意化を「Bers 埋め込み」という。

更に、もう一つの定義の仕方が有る。H 上の Poincaré 計量

$$\frac{dx \wedge dy}{y^2}$$

（これも当然 実解析的で Kähler）を $\widetilde{X}$ に引き戻して、X におとすと、X 上の標準的な計量 μ_X が得られ、その μ_X に対応する標準的な座標が $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ に入る標準的な射影的座標になる。つまり、この計量 μ_X を標準的な射影的構造や標準的な固有束などと並ぶ、X の一意化同型のもう一つの書き表し方と見ることができる。そして、μ_X が定義する面積要素を v_X と書くと、

$$\theta, \psi \in H^0(X, \omega_X^2) \mapsto \int_X \frac{\theta \cdot \overline{\psi}}{v_X} \in \mathbf{C}$$

なる対応が $\mathcal{M}_{g,r}$ 上の計量を定義し、その計量は（定数倍を除いて）ちょうど μ_{WP} と一致している。

(E.) $\mathbf{C}$ 上の理論のまとめ：$\widetilde{X} \cong H$ なる同型という、非常に古典的な１９世紀的なものから出発して、様々な「無害」な標準的な操作をすることにより、$\overline{\mathcal{S}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$、$s_H$、$\mu_{WP}$、$\mu_X$ といったような非常に非自明な対象たちを余り苦労もせずに構成することができた。実は、固有束という概念が完全に代数的なので、$\mathbf{Z}$ 上定義することができ、そうすれば、Schwarz torsor や $\eta_{g,r}$ も $\mathbf{Z}$ 上定義することができる：

$$(\overline{\mathcal{S}}_{g,r})_{\mathbf{Z}} \to (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbf{Z}}$$

従って、今まで復習してきた $\mathbf{C}$ 上の理論を一言でまとめるとしたら

> (*) $(\eta_{g,r})_{\mathbf{Z}}$ という（非常に非自明な）コホモロジー類を、s_H などを考察することによって、無限素点において、数論的に解消した。

といえよう。そうすると、以下の p 進的な理論は、何に関する理論なのかというと、ちょうどこの $(\eta_{g,r})_{\mathbf{Z}}$ の有限素点における数論的解消 (*arithmetic resolution*) といえよう。

II. 双曲的通常 (*hyperbolically ordinary*) locus 上の標準的な Frobenius 持ち上げ：

(A.) 固有束が定義する crystal：S^{log} は完備な p 進的 noetherian fine formal log scheme で、$f^{log} : X^{log} \to S^{log}$ は S^{log} 上の stable log-curve とする。（"*log*" をご存知ない方は、単に無視すればよい。）そういう X^{log} 上の固有束 $(P \to X, \nabla_P)$ を考えたいのだが、まず、そうい

う固有束が $Crys(X^{log}_{\mathbf{F}_p}/S^{log})$ という crystalline site 上の（$\mathbf{P}^1$-bundle の圏に価を取る） crystal をなしていることに気付こう。以下、 crystal の方を意味している時でも、 (P, ∇_P) と書くことにする。

何で crystal を考えたいかというと、Frobenius による引き戻しを考えたいからである。例えば、もし、 Frobenius 持ち上げ

$$\Phi^{log}_S : S^{log} \to S^{log}$$

（つまり、 *mod p* reduction を取ると Frobenius となるような射。例えば、もし S が完全体の Witt 環の $Spec$ であれば、 Φ^{log}_S はその条件で一意的に定まる。）が与えられると、 (P, ∇_P) を、 Φ^{log}_S でもってまずは $Crys((X^{log}_{\mathbf{F}_p})^F/S^{log})$ まで引き戻し、そして相対的 Frobenius 射

$$\Phi^{log}_{X/S} : X^{log}_{\mathbf{F}_p} \to (X^{log}_{\mathbf{F}_p})^F$$

で更にもう一回引き戻すと、 Φ^{log}_S にかなり本質的に依存する（$Crys(X^{log}_{\mathbf{F}_p}/S^{log})$ 上の）新しい crystal $\Phi^*(P, \nabla_P)$ が得られる。 この crystal $\Phi^*(P, \nabla_P)$ を (P, ∇_P) の「（Φ^{log}_S に関する） naive な Frobenius 引き戻し」という。

(B.) 再正規化 (*renormalized*) Frobenius 引き戻し：本当は、 (A.) の naive な Frobenius 引き戻しではなく、もうちょっと定義しにくい「再正規化 Frobenius 引き戻し」を考察したいのだ。 なぜかというと、理由は次の通りである。ちょうど $\mathbf{C}$ の場合には、沢山の固有束が有る中で、特別な、標準的なものを考えることによって、 s_H という断面が得られたように、 p 進的な場合にも、特別な、標準的な固有束を見つけたい。 しかし、それを見つけるためには、どんな条件を課したらいいかが問題である。 残念なことに、 $\mathbf{C}$ の場合と違って、曲線の「物理的な」一意化はないので、どんな条件にすればいいかは決して明らかではない。 そこで、一つの手掛かりとなるのは、 $\mathbf{C}$ の場合には、 monodromy が PGL_2 の $\mathbf{R}-$ 有理点に入っていたのだから、それを真似て、 p 進的な場合には、 monodromy が PGL_2 の $\mathbf{Z}_p-$ 有理点に入るという条件を課することができる。 しかし、 monodromy は何らかの積分を行なわないと得られないので、まだ、その「monodromy が PGL_2 の $\mathbf{Z}_p-$ 有理点に入る」という条件を、 monodromy という言葉が出ないような形に書き直したい。考えてみれば、その書き直した後の条件は自然に次のようになる：

> (*) 固有束 (P, ∇_P) が何らかの意味で Frobenius の作用に関して不変であってほしい。

ただ、こうはいっても、問題の Frobenius の作用の定義の仕方はまだはっきりしない。

そこで、手本となるのは、次の具体例である。 $S^{log} = Spec(\mathbf{Z}_p)$ で、 $X^{log} = \overline{\mathcal{M}}^{log}_{1,0}$ （つまり、楕円曲線の moduli stack）で、 (P, ∇_P) は普遍的な楕円曲線の一次 de Rham cohomology 加群が定義する $\mathbf{P}^1$-bundle とする。 （ここで、 ∇_P は Gauss-Manin 接続によるもので、 Hodge section は de Rham cohomology の Hodge filtration による section となる。） こう定義すると、 (P, ∇_P) が固有束になることはすぐ分かるし、しかも無限素点では、（I. の (C.) の）標準的固有束になる。 今は有限素点の方を考えているが、有限素点においてこの固有束が持っている特別な性質といえば、その自然な Frobenius 作用がある。 つまり、 $\Phi^*(P, \nabla_P)$ は、少なくとも $\mathbf{Q}_p$ と tensor すれば、 (P, ∇_P) に同型になり、 $\mathbf{Z}_p$ 上の同型を得るためには、 $\Phi^*(P, \nabla_P)$ の整構造 (integral structure) を、 Hodge section を使って少し調整すればよい。

その、「naive Frobenius 引き戻しを取った後、 Hodge section を使って整構造を調整する」という操作は、今 の X^{log} や (P,∇_P) の場合だけでなく、一般に定義することができ、その操作によって得られる新しい crystal を「再正規化 Frobenius 引き戻し」

$$\mathbf{F}^*(P,\nabla_P)$$

という。 ところが、 $X^{log}=\overline{\mathcal{M}}_{1,0}^{log}$ の場合には、 (P,∇_P) への Frobenius 作用は実際に

$$(P,\nabla_P)\cong\mathbf{F}^*(P,\nabla_P)$$

のような同型を定義する。 即ち、この固有束 (P,∇_P) は「Frobenius の作用に関して不変」なのである。

(C.) 標数 p の固有束の $p-$ 曲率： ここ (C.) では、 S^{log} が標数 p の scheme であると仮定しよう。 そうすると、固有束 (P,∇_P) の $p-$ 曲率を取ることができる。 $p-$ 曲率 $\mathcal{P}$ は

$$f_*(Ad(P)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Phi_X^*\omega_{X^{log}/S^{log}})$$

（ここで、 $\Phi_X^{log}:X^{log}\to X^{log}$ は X^{log} の絶対的 Frobenius）の（S^{log} 上相対的な接続に関して） horizontal な section になる。 ところが、 ((B.) の意味で） Frobenius 不変な固有束の初等的な性質として、そういう固有束の *mod p* reduction ならば、 $p-$ 曲率が必ず巾零になる。 ここで、「巾零」とはどういうことかというと、 Killing 形式

$$<-,->:Ad(P)\otimes_{\mathcal{O}_X}Ad(P)\to\mathcal{O}_X$$

が有って、それを $\mathcal{P}$ に施すことによって「$\mathcal{P}$ の行列式」

$$<\mathcal{P},\mathcal{P}>\in\Gamma(S,f_*\omega^2_{X^{log}/S^{log}})$$

のようなものを定義することができる。 つまり、「巾零」とは、単に、この行列式が零になることを意味する。

ここで、幾つかの用語を導入しておこう。 $p-$ 曲率が零点を持たないような固有束のことを「許容固有束」 (*admissible indigenous bundle*) と呼ぼう。 $p-$ 曲率が巾零となるような固有束のことを「巾零固有束」 (*nilpotent indigenous bundle*) と呼ぼう。 Frobenius 不変な $\mathbf{Z}_p$ 上平坦な固有束の *mod p* reduction が必ず「巾零許容固有束」になることは容易に証明できるから、

> (*) （この理論で）関心の有る固有束は本当はこの「巾零許容固有束」だけなのである。

更に、幾つか便利な記号を導入しよう。 まず、 $\Phi^*\Omega^{log}_{\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathbf{F}_p}$ という $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ 上の rank $3g-3+r$ のベクトル束に対応する「幾何的な」ベクトル束を $\overline{\mathcal{Q}}_{g,r}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ と書こう。 すると、標数 p の固有束の $p-$ 曲率の行列式を取ることによって、

$$\overline{\mathcal{V}}_{g,r}:\overline{\mathcal{S}}_{g,r}\to\overline{\mathcal{Q}}_{g,r}$$

なる $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ 上の射が得られる。 この射を「固有束の Verschiebung」という。 $\overline{\mathcal{Q}}_{g,r}$ の zero section を、この Verschiebung で引き戻せば、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}\subseteq\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ なる閉部分スタックが得られる。

因みに、定義から明らかなように、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ はちょうど「巾零な固有束付きの安定曲線の moduli stack」なのである。

> 定理：$\overline{\mathcal{V}}_{g,r}$ は有限で平坦な射で、その次数は p^{3g-3+r} である。従って、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ もそうである。

特に、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ は $\mathbf{F}_p$ 上 proper なのである。

一方、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{adm} \subseteq \overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ を許容固有束の locus と定義すると、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{adm}$ は $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ の中の開部分スタックになる。更に、次のような重要な定義が有る：

> 定義：$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord} \subseteq \overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ を、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ 上étale な点からなる $\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ の開部分スタックと定義する。又、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord}$ に parametrize された固有束を「通常（巾零）固有束」(*ordinary nilpotent indigenous bundle*) と呼ぶ。

すると、

> 命題：$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{adm}$ はちょうど、$\mathbf{F}_p$ 上滑らかな点からなる $\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ の開部分スタックに当たる。従って、特に、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord} \subseteq \overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{adm}$。

最後に、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ の幾つかの基本的な性質について話そう。$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ は必ず $\mathbf{F}_p$ 上幾何的に連結ではあるが、一般には被約ではない。（ただし、$(g,r) = (1,1)$ や $(g,r) = (0,4)$ の場合には、被約である。）従って、$\mathbf{F}_p$ 上 generic に smooth ですらない既約成分も、場合によっては存在する。それらの既約成分についても、いろんなことが知られているが、ここでは、時間の関係で、触れないことにする。

(D.) 通常 locus 上の標準的な持ち上げ（＝主定理）：「通常理論」の一番中心的な一連の結果は、(C.) の $(\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord})_{\mathbf{F}_p}$ を $\mathbf{Z}_p$ まで持ち上げたものの上で定義された標準的な Frobenius 持ち上げに関するものである。まず、$(\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord})_{\mathbf{F}_p} \to (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbf{F}_p}$ がétale であるため、$\mathbf{Z}_p$ 上平坦な（同型を除いて）一意的なétale な持ち上げ

$$(\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord})_{\mathbf{Z}_p} \to (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p}$$

が存在することに気付こう。記号を簡単にするため、以下 $S^{log} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord})_{\mathbf{Z}_p}$ としよう。そして、$(\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p}$ から引き戻した同義反復的な曲線を $X^{log} \to S^{log}$ と書こう。そうすると、まず、次のような定理が有る：

> 定理：S^{log} の上では、次のような二つの対象が存在する：(a.) Frobenius 持ち上げ $\Phi_S^{log} : S^{log} \to S^{log}$; (b.)（$\Phi_S^{log}$ に関して）Frobenius 不変な X^{log} 上の固有束 (P, ∇_P)。しかも、Φ_S^{log} と (P, ∇_P) という二組は、「Frobenius 不変」という条件で一意的に定まる。

念のために書いておくと、ここで、Frobenius 不変とは、単に $\mathbf{F}^*(P, \nabla_P) \cong (P, \nabla_P)$ という意味である。（ここで、$\mathbf{F}^*$ が Φ_S^{log} に依存していることを忘れないようにしよう。）そして、$(X^{log})_{\mathbf{F}_p}^{ord} \subseteq X_{\mathbf{F}_p}^{log}$ を、$P_{\mathbf{F}_p}$ の Hodge section と、巾零な $p-$ 曲率に定義される section が交わらない点からなる開部分集合と定義し、$(X^{log})^{ord} \subseteq X^{log}$ を、その *mod* p の開部分集合

に定義される p 進的な開部分対象とすると、その $(X^{log})^{ord}$ の上でも、標準的な Frobenius 持ち上げが決まる。

> 定理：(P, ∇_P) の Hodge section を動かさないような一意的な Φ_S^{log} 上の Frobenius 持ち上げ $\Phi_X^{log} : (X^{log})^{ord} \to (X^{log})^{ord}$ が存在する。

最後に、この二つの標準的な Frobenius 持ち上げは、（曲線 X^{log} の）「log admissible な被覆」や $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ の無限での境界への制限と両立する。

III. Frobenius 持ち上げと Kähler 計量の関係：

(A.) ケーラー計量が定義する標準的な座標：前にもふれたように、もし M が（滑らかな）複素多様体で、μ_M が M 上の実解析的なケーラー計量ならば、μ_M を積分することにより、M の各点 $e \in M$ の適当な近傍の上で標準的な座標が定義される。 まず、幾つかの記号を導入しよう：

> M^c: M と共役な複素多様体 （つまり、正則関数と反正則関数を入れ替える）。
>
> M_e: M を e という点で局所化することによって得られる複素多様体の芽 (germ)。
>
> N: $M^c \times M$ を (e, e) という点で局所化することによって得られる複素多様体の芽 (germ)。
>
> Ω^{hol}: Ω_M を N に引き戻すことによって得られる N 上のベクトル束。
>
> Ω^{ant}: Ω_{M^c} を N に引き戻すことによって得られる N 上のベクトル束。

そして、Ω^{ant} の section を正則な変数に関して微分することによって、次のような de Rham complex が得られる：

$$0 \longrightarrow \Omega^{ant} \xrightarrow{d^{hol}} \Omega^{ant} \otimes_{\mathcal{O}_N} \Omega^{hol} \xrightarrow{d^{hol}} \Omega^{ant} \otimes_{\mathcal{O}_N} (\wedge^2 \Omega^{hol}) \xrightarrow{d^{hol}} \dots$$

すると、μ_M は M 上の実解析的な (1,1)-form なので、上の系列の三番目の項の正則（！）な section μ を定義し、しかも、d^{hol} に零化される。 従って、μ を Poincaré Lemma を使って積分することができ、$d^{hol}\alpha = \mu$ となるような α を求めることができる。 そして、この α を $e \times M_e \subseteq N$ に制限すると、

$$\beta : M_e \to \Omega_{M^c,e} = \Omega_{M,e}^c$$

なる正則な射が得られる。ところが、ケーラー計量が非退化な双線形形式を定義していることから、この射 β が局所的な同型であることがすぐ出る。 即ち、M_e を $\Omega_{M,e}^c$ という affine 空間で局所的に一意化できたことになる。

(B.) 通常 Frobenius 持ち上げが定義する標準的な座標： p を奇数の素数、k を閉体、A をその Witt 環 $W(k)$、S を A 上滑らかな相対的次元 d の formal scheme とする。（勿論、log 版

も有る。） 更に、A の Frobenius を $\Phi_A : A \to A$ と書く。 S の Frobenius 持ち上げ $\Phi : S \to S$ が与えられた時、 微分層に誘導される射

$$\Omega_\Phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{p} d\Phi : \Phi^* \Omega_{S/A} \to \Omega_{S/A}$$

が同型となる時、Φ を「通常」 (*ordinary*) という。

$z \in S(k)$ を S の $k-$ 有理点とし、 R_z を S の z における局所環の完備化とする。 すると、 R_z は $A[[t_1, \ldots, t_d]]$ なる巾級数環に非標準的に同型になる。 上の Frobenius 作用 Ω_Φ の不変量を取ると、 rank d の自由な $\mathbf{Z}_p$- 加群 Ω^{et} が得られ、かつ、次のような性質が成り立つ :

(1) $\Omega^{et} \subseteq \Omega_{S/A}$ なる自然な単射が標準的な同型 $\Omega^{et} \otimes_{\mathbf{Z}_p} R_z \cong \Omega_{S/A} \otimes_{\mathcal{O}_S} R_z$ を誘導する。

(2) 任意の $\omega \in \Omega^{et}$ に対して $q_\omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{Q}(\omega)$ とおけば、 $\Phi^{-1}(q_\omega) = q_\omega^p$ となるような連続な準同型 $\mathcal{Q} : \Omega^{et} \to R_z^\times$ が存在し、一意的である。 つまり、いいかえれば、これらの単元 q_ω が Frobenius 持ち上げ Φ を「対角化」している。

(3) $dq_\omega / q_\omega = \omega$。従って、 Ω^{et} の基底 $\omega_1, \ldots, \omega_d$ を取ると、 $q_{\omega_1}, \ldots, q_{\omega_d}$ たちは $S_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} Spf(R_z)$ の（$\mathbf{G}_m^d$ による）「Φ に定まる標準的な一意化」を引き起こす。

(4) $\{$すべての $q_\omega = 1\}$ という条件で一意的に決まる S_z の $A-$ 有理点は $z \in S(k)$ の「標準的な持ち上げ」になる。

特に、「標準的な局所的な一意化」 が定義されるという点において、 Frobenius 持ち上げとケーラー計量には何らかの類似性が有る。

(C.) 曲線やそのモジュライの場合： II. の (D.) の二つの主定理の Frobenius 持ち上げは実は、通常なのである。 従って、特に $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ やその上にある同義反復的な曲線の標準的な局所的一意化を定義している。 つまり、

> これらの Frobenius 持ち上げによる一意化を、 μ_X や μ_{WP} による複素解析的な一意化の p 進版とみなしたい。

更に、 p 進的な場合には、（通常巾零固有束付きの）標数 p の曲線の「標準的な持ち上げ」という面白い副産物も有る。 主定理に出てくる標準的な固有束 (P, ∇_P) を、そういう標準的な曲線 $X \to Spec(A)$ に制限すると、

$$\pi_1(X_K) \to PGL_2(\mathbf{Z}_p)$$

（ここで、 K は A の商体）なる標準的な crystalline 表現が得られる。 これも、 $\mathbf{C}$ 上の一意化同型による $PSL_2(\mathbf{R})$ への標準的な表現と類似的なものである。

(D.) 楕円曲線の Serre-Tate 理論との関係：今までは、双曲的な場合しか扱っていなかったけど、 $g = 1,\ r = 0$ とおくと、理論が技術的にはずっとやさしくなるものの、今までと基本的に同じような証明によって同じような結果が得られる。 しかも、その場合にあらわれる理論というのは、ちょうど通常楕円曲線の Serre-Tate 理論である。例えば、標準的なパラメータ q_ω

はちょうど Serre-Tate パラメータになり、標準的な持ち上げも Serre-Tate 理論のそれとちょうど一致するのである。

IV. 固有性に関する性質：

(A.) 哲学的な背景： $S^{log} = (\overline{\mathcal{M}}^{log}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p}$ とし、$\mathcal{D} \to S$ を、固有束の変形としてあらわれる接続付きの $\mathbf{P}^1$-bundle を parametrize するモジュライ空間（$= S$ 上の相対的 formal scheme）とする。そういう接続付きの $\mathbf{P}^1$-bundle が crystal を定義することから、この相対的 formal scheme $\mathcal{D} \to S$ に自然な「Gauss-Manin」接続 $\nabla_{\mathcal{D}}$ が入ることが分かる。（つまり、$(\mathcal{D}, \nabla_{\mathcal{D}})$ を、普遍的な曲線の何らかの 非アーベルな de Rham cohomology と思えばいい。）更に、$\overline{\mathcal{S}}_{g,r} \subseteq \mathcal{D}$ という自然な射が Hodge filtration にかわる「Hodge subspace」のようなものを定義している。そして、最後に、（naive か renormalized かは特定しないが） Frobenius による引き戻しを考えることによって、$(\mathcal{D}, \nabla_{\mathcal{D}})$ に何らかの Frobenius 作用が入ると見ることもできる。 即ち、 Faltings や Fontaine が定義した圏 $\mathcal{MF}^{\nabla}$ の対象のようなものがこれで一応定義できたことになるが、ただ、普段と違って、この対象は「相対的ベクトル空間（つまり、ベクトル束）の圏」に価を取るのではなく、 「相対的 formal scheme の圏」に価を取る。

　とにかく、勿論、厳密な意味ではこの対象が決して $\mathcal{MF}^{\nabla}$ に入っているわけではないが、「価を取る圏」こそ違うものの、形式的には、 $\mathcal{MF}^{\nabla}$ の対象と似たようなものである。 ところが、もし $\mathcal{MF}^{\nabla}$ の本当の対象だったら、 Frobenius 不変量をとることにより、 $\pi_1(S^{log}_{\mathbf{Q}_p})$ の crystalline 表現を定義しているはずだ。 あるいは、いいかえれば、 $S^{log}_{\mathbf{Q}_p}$ の有限étale 被覆の系を定義する。だから、うまくいけば、 $(\mathcal{D}, \nabla_{\mathcal{D}})$ の Frobenius 不変量をとることによって、$(\mathcal{D}, \nabla_{\mathcal{D}})$ に随伴する $S^{log}_{\mathbf{Q}_p}$ の有限étale 被覆の系を構成したいのだが、残念ながら、そうはいかない。 一方、 $(\overline{\mathcal{N}}^{ord}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p} \to S^{log}$ やそれ上定義されている標準的な Frobenius 持ち上げをとることにより、標数 0 ではétale となるような、 S^{log} の何らかの「被覆の系」はもう得られているが、 $(\overline{\mathcal{N}}^{ord}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p} \to S^{log}$ が有限ではないために、その系の被覆も有限にはならない。

　つまり、$(\mathcal{D}, \nabla_{\mathcal{D}})$ に随伴する 「被覆の系」 を構成する上では、ある意味では、お互い dual である「proper 性」と「étale 性」という二つの性質の内、今までは、「étale 性」の方を大事にしてきたのに対して、「proper 性」をなおざりにしてきた。従って、この (IV.) では、今までの理論が有している「proper 性」に関する性質について説明したい。 ある意味では、「通常性」（又は、「許容性」）という open な条件を課している以上、この通常理論は、少なくとも $\mathbf{Z}_p$ の上では如何なる「proper 性」も有するわけがないが、ちょっと驚くべきことに、「étale 性」の場合と同様、 $\mathbf{Z}_p$ でなく、 $\mathbf{Q}_p$ の上で物事を考えることによって、（意外なことに）この通常理論も何らかの意味での「proper 性」をちゃんと有しているのだ。

(B.) アフィン性と連結性の関係： 時間の関係で細かいことには余り立ち入りたくないが、結果だけを述べると次のようになる：

> 定理： $\overline{\mathcal{N}}^{adm}_{g,r}$ や $\overline{\mathcal{N}}^{ord}_{g,r}$ はアフィンなスタックである。 （「アフィンなスタック」とは、その coarse moduli がアフィンであることを意味する。）

この定理が何で固有性のあらわれなのかに関してはここでは説明しないが、ある種の固有性から以上のアフィン性に関する結果が出るのだ。 そして、そのかなり直接な Corollary として、次のようなものがある：

系： p が g や r に関して充分に大きければ、$(\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbf{F}_p}$ は幾何的に連結になる。

この連結性の結果は勿論非常によく知られていて、これまでも、幾つもの（Teichmüller 理論や Hurwitz scheme などによる）証明が与えられているが、今度の別証の面白みはどこにあるかというと、

「この曲線の通常理論＝ Teichmüller や Bers の $\mathbf{C}$ 上の理論の p 進版」

という類似に即した形になることにあるといえよう。

(C.) 通常理論が有している固有性：記号：

R: 値群が p-divisible となるような標数 p の付値環。 その商体を K_R と書く。

$Z \stackrel{\mathrm{def}}{=} Spf(W(R))$ （ここで、 Spf は p 進的な位相に関してとる）。

$Z_\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} Spf(W(K_R))$。

$\overline{\mathcal{T}}_{g,r}$: 射影系

$$\ldots(\overline{\mathcal{N}}^{ord}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p} \to (\overline{\mathcal{N}}^{ord}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p} \to (\overline{\mathcal{N}}^{ord}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p} \to (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbf{Z}_p}$$

（ここで、最後の射以外の射は 全部 標準的な Frobenius 持ち上げ）の射影極限。

すると、射 $\overline{\mathcal{T}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ は次のような付値的条件を満たしている。

定理： $Z-$ や $Z_\eta-$ 有理点を考えることによって得られる自然な射

$$\mathcal{T}_{g,r}(Z) \to \mathcal{T}_{g,r}(Z_\eta) \times_{\mathcal{M}_{g,r}(Z_\eta)} \mathcal{M}_{g,r}(Z)$$

は全単射である。（log 版も有り。）

つまり、ある適当な意味では、射 $\overline{\mathcal{T}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ が「proper」であり、即ち、ただのétale な「射」であるのみならず、「被覆」っぽいものであることがいえる。 あるいは、他の言い方をすれば、 base の曲線の退化の仕方が変にならない限り、通常な Frobenius 不変固有束が退化しても、依然通常な Frobenius 不変固有束である。

(D.) Teichmüller 理論との類似について： 思い出してみれば、古典的 Teichmüller 理論でも、一番中心的な結果は Teichmüller 写像の存在と一意性なんだけど、それを証明するためには、大雑把にいうと、こんな作戦が用いられる： Teichmüller 写像の「空間」から $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ への自然の写像 ξ が有って、その写像 ξ が全単射であることをいいたいが、それをいうためには、ξ の像が open かつ closed であることをいえばよい。 open であることをいうためには、ξ がétale であることを証明し、 closed であることをいうためには、「適当な付値的条件」（＝この場合には、 Teichmüller 写像の極値性質）が満たされることを証明する。 そして、その証明の副産物として、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ ないしは $\mathcal{M}_{g,r}$ の連結性も出る。 だから、今の古典的 Teichmüller 理論の描写から考えると、 p 進的な場合にも、類似的な事実を全部示したことになる。

V. 数体上大域的な理論の可能性：

今までの理論では、完備化する素点の多様性こそ許したものの、それぞれの素点で存在する理論たちがどう関係しあっているについては何もいっていない。（その理由は単に、私の研究がまだそこまで進んでいないことにあるだけだが。）しかし、どの素点を取っても、今まで展開してきた一意化理論が非常に標準的だし、しかもそれぞれの素点の理論が少なくとも形式的には、かなりよくお互いに似ているので、何らかの意味で、「連動している」と思いたい。ただ、現在のところ、まだ、ろくな予想すら 立てていないので、何も非自明なことがいえない。

ただ、数学的な予想ができなくても、少なくとも次のような「哲学的な予想」はできる。有理数体のある素点 v において、一意化理論を展開するということは、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ に $v-$ 進的な幾何を入れることだと見ることができるが、もう少し哲学的な観点をとると、その一意化理論は、（$\mathbf{Z}$ 上の）$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ に対して、v という素点において、$\mathbf{Z}$ から「俗にいう」 $\mathbf{F}_1$ （$=\mathbf{Z}$ の中に潜むとされる仮想的な「定数体」）への descent data を 与えることでもある。 従って、もしそれぞれの素点で構成した descent data が旨く張り合っていさえすれば、$\mathbf{Z}$ 上の $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ をまるごと $\mathbf{F}_1$ まで降ろすことができる筈である。 その辺の可能性を今後 徹底的に調べていきたい。

文献

[1] Gardiner, F., *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, John Wiley and Sons (1987).

[2] Lehto, O., *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Graduate Texts in Mathematics **109**, Springer (1987).

[3] Faltings, G., *Crystalline Cohomology and p-adic Galois Representations*, *JAMI Conference*, Johns Hopkins Univ. Press, pp. 25-79 (1990).

[4] Mochizuki, S., *A Theory of Ordinary p-adic Curves*, manuscript.

[5] Mochizuki, S., *The Generalized Ordinary Geometry of p-adic Hyperbolic Curves*, in preparation.